JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 54, 206–227 (1983)

Équations différentielles sur l'espace de Wiener et formules de Cameron–Martin non-linéaires

ANA BELA CRUZEIRO

Communicated by Paul Malliavin

Received June 1983; revised July 1983

1. NOTATIONS ET ÉNONCÉ DES RÉSULTATS PRINCIPAUX

1.1. *Notations générales*

Soit X l'espace de Wiener, c'est-à-dire, l'espace des applications continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ nulles en zéro. X est un espace de Banach avec la norme $\|x\| = \max |x(\tau)|$. On note par H le sous-espace de Cameron–Martin,

$$H = \left\{ u \in X : u' \text{ existe et vérifie } \int_0^1 |u'(\tau)|^2 \, d\tau < +\infty \right\}$$

et on considère sur H le produit scalaire défini par $(u|v)_H = \int_0^1 u'(\tau)\, v'(\tau)\, d\tau$. H est un espace d'Hilbert. On considère sur H une base orthonormée $e_1, \ldots, e_k, \ldots$, de telle sorte que les e_k appartiennent au sous-espace:

$$H_0 = \{ h \in H : h'' \text{ est une mesure} \}.$$

On peut prendre, par exemple,

$$e_1(\tau) = \tau,\; e_k(\tau) = \frac{\sqrt{2}}{(k-1)\,\pi} \sin(k-1)\,\pi\tau, \qquad k \geqslant 2.$$

En particulier l'application donnée par $x \to (x|e_k)$ sur H est linéaire continue et possède par conséquent une extension à l'espace X tout entier que l'on note par $\langle x, e_k \rangle$.

On considère X muni de la mesure de Wiener μ, i.e., la mesure de probabilité caractérisée par :

$$\int_X \exp(i \langle h, x \rangle)\, d\mu(x) = \exp(-\tfrac{1}{2} \|h\|_H^2), \qquad \forall h \in H_0.$$

On peut définir sur X des polynômes d'Hermite vectoriels, $\mathscr{H}_s(x) =$

0022-1236/83 $3.00

$\prod_i \mathscr{H}_{s_i}\langle x, e_i\rangle$, où $s=(s_1,\dots,s_n,\dots)$, $s_i \in \mathbb{N}$, $|s| = \sum s_i < +\infty$ et $\mathscr{H}_{s_i}$ sont les polynômes d'Hermite usuels sur $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{H}_{s_i}(\xi) = \frac{(-1)^{s_i}}{(s_i!)^{1/2}} e^{\xi^2/2} \frac{d^{s_i}}{d\xi^{s_i}} e^{-\xi^2/2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Alors (cf. [14]), on sait que ces fonctionelles constituent une base orthonormée de $L^2(X, \mathbb{R})$ et, si G est un Hilbert abstrait séparable ayant $\{g_q\}$ pour base, alors $g_q \otimes \mathscr{H}_s(x)$ est une base de $L^2(X; G)$.

1.2. *Calcul différentiel sur l'espace de Wiener*

On utilisera le calcul différentiel adapté aux fonctionelles d'Ito (cf. [6, 9, 11, 13]), dans lequel H joue un rôle essentiel. Ainsi, si φ est une fonction mesurable assez régulière définie sur X à valeurs dans un Hilbert G, et $x \in X$, $\nabla\varphi(x)$ est l'application linéaire définie par :

$$\nabla\varphi(x)(h) = D_h\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} [\varphi(x+\varepsilon h) - \varphi(x)], h \in H.$$

Ceci étant, $\nabla\varphi(x) \in \mathscr{L}(H; G)$, espace des opérateurs linéaires de H dans G. Soit $\mathscr{L}_{(2)}(H; G)$ la classe des opérateurs d'Hilbert–Schmidt, c'est-à-dire, vérifiant :

$$\|\Psi\|^2_{\mathscr{L}_{(2)}(H;G)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \|\Psi(e_k)\|^2_G < +\infty.$$

$\mathscr{L}_{(2)}(H; G)$ est aussi un Hilbert avec le produit scalaire :

$$\langle \Psi, \Theta\rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} (\Psi(e_k) | \Theta(e_k))_H.$$

On peut alors définir $\nabla^2\varphi(x),\dots,$ et $\nabla^i\varphi(x)$ peut être considéré comme un opérateur i-linéaire sur H (à valeurs dans G). On considère l'espace correspondant $\mathscr{L}^i_{(2)}(H; G)$ avec la norme d'Hilbert–Schmidt, i.e.,

$$\|\Psi\|^2_{\text{H-S}} = \|\Psi\|^2_{\mathscr{L}^i_{(2)}(H;G)} = \sum_{k_1,\dots,k_i=1}^{+\infty} \|\Psi(e_{k_1},\dots,e_{k_i})\|^2_G.$$

Les espaces de Sobolev W^p_r sur X $(1 \leqslant p < +\infty)$ ont été définis [9] comme les espaces des fonctions φ sur X telles que $\|\varphi\|_{L^p(\mu)} < +\infty$ et, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$ $\|\nabla^i\varphi\|_{L^p(\mu)} < +\infty$, munis de la norme naturelle

$$\|\varphi\|_{r,p} = \|\varphi\|_{L^p(\mu)} + \sum_{i=1}^{r} \|\nabla^i\varphi\|_{L^p(\mu;\mathscr{L}^i_{(2)}(H;G))}.$$

On note par W^p_∞ l'espace $\bigcap_r W^p_r$.

1.3. *L'opérateur divergence*

On appelera champ de vecteurs sur X toute application f de X dans H et, si $f \in L^2(X; H)$, on notera par δf sa divergence, au sens de [6] (cf. également [4]), c'est-à-dire, δ est l'opérateur adjoint de ∇ pour la mesure de Wiener, plus précisemment, δf est l'élément de $L^2(X)$ (s'il existe) qui vérifie

$$\int_X \delta f \, \theta \, d\mu = \int_X (f \mid \nabla \theta)_H \, d\mu$$

pour toute fonction $\theta \in W_1^2(X)$.

D'après un théorème de Krée et Krée (cf. [7]), si $f \in W_r^p$ alors δf existe et appartient à W_{r-1}^p.

1.4. *Énoncé du théorème principal*

On se propose de montrer le théorème suivant:

1.4.1. Théorème. *Soit A un champ de vecteurs sur X satisfaisant les hypothèses:*

(i) $A \in W_\infty^2$ *et* $\forall \lambda > 0 \int_X \exp(\lambda \, \|A(x)\|) \, d\mu(x) < +\infty$,

(ii) $\forall \lambda > 0 \int_X \exp(\lambda \, \|\nabla A(x)\|) \, d\mu(x) < +\infty$, *et*

(iii) $\forall \lambda > 0 \int_X \exp(\lambda \, | \, \delta A(x)|) \, d\mu(x) < +\infty$.

Alors on a l'existence d'une fonction $U_t^A(x)$ définie pour tout t, $d\mu$ – p.p. en x et qui vérifie l'équation (au sens de la formule (4.1))

(iv) $(dU_t^A(x)/dt) = A(U_t^A(x))$, $U_0^A(x) = x$, $\forall t$, $d\mu$ – *p.p. en* x.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ la mesure $(U_t^A)_* \, \mu$ est absolument continue par rapport à μ et, si on pose $(d(U_t^A)_* \, \mu / d\mu)(x) = k_t(x)$ on a

(v) $k_t \in L^p(\mu) \; \forall p$.

En plus, si $\delta A \in W_1^{16}$, on a

(vi) $k_t(x) = \exp(\int_0^t \delta A(U_{-\xi}^A(x)) \, d\xi)$.

1.5. *La formule de Cameron–Martin*

Comme Corollaire on obteindra d'après 1.4.1(vi), la formule de Cameron–Martin (cf. [1] et aussi [8, 12]) pour les champs constants $A(x) = h \in H$:

$$(d(U_1^h)_* \, \mu / d\mu)(x) = \exp\left(\int_0^1 h'(\tau) \, dx(\tau) - \tfrac{1}{2} \int_0^1 [h'(\tau)]^2 \, d\tau\right)$$

où $\quad U_t^h(x) = x + th.$

En effet, $\delta A(x) = \int_0^1 h'(\tau)\, dx(\tau)$, intégrale stochastique au sens d'Ito, et

$$E\left(\exp \lambda \int_0^1 h'(\tau)\, dx(\tau)\right) = \exp \cdot \left(\frac{\lambda^2}{2} \|h\|_H^2\right).$$

Les hypothèses du théorème 1.4.1 n'impliquent *aucune continuité* du champ de vecteurs. Ce théorème s'inscrit dans le cadre du calcul différentiel adapté aux fonctionelles d'Ito (cf. [10]). Des théorèmes antérieurs [2, 5], s'insèrent dans un contexte différent.

1.6. *Un résultat en dimension finie*

Pour montrer le Théorème 1.4.1, on aura besoin de la non-explosion des flots associés à certains champs de vecteurs en dimension finie. Ainsi, on utilisera le résultat suivant (cf. [3]):

1.6.1. THÉORÈME. *Munissons $\mathbb{R}^n$ de la mesure Gaussienne standard μ et soit δB la divergence de B par rapport à μ. Supposons que*

(i) $B \in C^3$ *et* $\forall \lambda > 0 \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\lambda \|B(x)\|)\, d\mu(x) < +\infty$,

(ii) $\forall \lambda > 0 \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\lambda |\delta B(x)|)\, d\mu(x) < +\infty$.

Alors le flot $U_t^B(x)$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mu - p.p.$ en x. En plus, si $k_t(x) = exp(\int_0^t \delta B(U_{-\xi}^B(x)\, d\xi)$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

(iii) $(d(U_t^B)_* \mu / d\mu)(x) = k_t(x)$, *avec* $k_t \in L^p(\mu)\ \forall p$, $\|k_t\|_{L^p(\mu)} \leqslant C(M)$,

si $|t| < M$, où $C(M)$ ne dépend que de M, p et des valeurs des intégrales dans (ii).

2. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES APPROXIMATIONS SUR $\mathbb{R}^n$

2.1. *Convergence de martingales dans W_1^p*

Soient $\mathscr{H}_s(x)$ les polynômes d'Hermite sur X définis dans le paragraphe 1. Si G est un Hilbert abstrait, on sait que, pour toute fonction $f \in L^2(X; G)$, on a la décomposition $f(x) = \sum_s c_s \mathscr{H}_s(x)$, où $s = (s_1, ..., s_i, ...)$, $s_i \in \mathbb{N}$, $|s| = \sum s_i < +\infty$, *et* $\sum \|c_s\|_G^2 < +\infty$.

Notons par $\mathfrak{F}_n = \{s = (s_1, ..., s_q, ...) : s_q = 0\ \ \forall q > n\}$ et soit V_n le sous-espace de H engendré par $\{e_1, ..., e_n\}$. On dira que $f \in L^2(V_n; G)$ si $f(x) = \sum_{s \in \mathfrak{F}_n} c_s \mathscr{H}_s(x)$, c'est-à-dire, si $f(x) = F(x_1, ..., x_n)$, où $x_i = \langle x, e_i \rangle$. On peut alors identifier $L^2(V_n; G)$ à un sous-espace de $L^2(X; G)$, et on note par E^{V_n} l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(X; G)$ sur $L^2(V_n; G)$. (E^{V_n} est une notation générique, où G ne figure pas explicitement).

Si $f \in L^2(X; G)$ et si f s'écrit $f(x) = \sum_s c_s \mathscr{H}_s(x)$, alors il est clair que $E^{V_n} f$ est donné par $E^{V_n} f(x) = \sum_{s \in \mathfrak{F}_n} c_s \mathscr{H}_s(x)$.

2.1.1. LEMME. *Soit $f \in W_1^2(X; G)$. Alors on a l'égalité $D_h(E^{V_n} f) = E^{V_n}(D_h f)$, pour tout $h \in V_n$.*

Démonstration. Soit $h = e_k$, avec $k \leqslant n$. En notant $x_i = \langle x, e_i \rangle$, on a:

$$
\begin{aligned}
D_{e_k} \mathscr{H}_s(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\mathscr{H}_s(x + \varepsilon e_k) - \mathscr{H}_s(x) \right] \\
&= \mathscr{H}_{s_1}(x_1) \cdots \frac{d}{dx_k} \mathscr{H}_{s_k}(x_k) \cdots \mathscr{H}_{s_n}(x_n) \cdots \\
&= (s_k!)^{1/2} \mathscr{H}_{s_1}(x_1) \cdots \mathscr{H}_{s_k - 1}(x_k) \cdots \mathscr{H}_{s_n}(x_n) \cdots
\end{aligned}
$$

(on fait la convention $\mathscr{H}_{-1}(\xi) = 0$).

Comme $f \in W_1^2$, f est la limite pour la norme de W_1^2 des sommes partielles de la série $\sum_s c_s \mathscr{H}_s(x)$. En dérivant terme à terme cette série, on obtient

$$
D_{e_k} f(x) = \sum_s c_s D_{e_k} \mathscr{H}_s(x),
$$

série convergente dans $L^2(X; G)$, d'où $D_{e_k} f(x) = \sum_s (s_k!)^{1/2} \; c_s \mathscr{H}_{s_1}(x_1) \cdots \mathscr{H}_{s_k - 1}(x_k) \cdots \mathscr{H}_{s_n}(x_n) \cdots$ et

(i) $E^{V_n} D_{e_k} f(x) = \sum_{s' \in \mathfrak{F}_n} (s_k!)^{1/2} \; c_s \mathscr{H}_{s'}(x)$, où $s' = (s_1, \ldots, s_k - 1, \ldots, s_n, \ldots)$.

En outre, $E^{V_n} f(x) = \sum_{s \in \mathfrak{F}_n} c_s \mathscr{H}_s(x)$ et, ceci étant,

(ii) $D_{e_k} E^{V_n} f(x) = \sum_{s \in \mathfrak{F}_n} (s_k!)^{1/2} \, c_s \mathscr{H}_{s'}(x)$.

Utilisons l'hypothèses $k \leqslant n$; on voit que, finalement, on somme sur les mêmes ensembles d'indices, d'où l'égalité de (i) et (ii). ∎

2.1.2. LEMME. *Pour tout $1 \leqslant p < +\infty$ et $0 \leqslant r < +\infty$ et quelque soit $f \in W_r^p$, on a*

(i) $\| E^{V_n} f \|_{r,p} \leqslant \| f \|_{r,p}$

D'autre part, la martingale $E^{V_n} f$ converge dans tous les W_r^p, c'est à-dire

(ii) $\| E^{V_n} f - f \|_{r,p} \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.

Démonstration. $\| E^{V_n} f \|_{L^p} \leqslant \| f \|_{L^p}$. D'autre part,

$$
\begin{aligned}
&\| \nabla E^{V_n} f(x) \|^p \\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \| \nabla E^{V_n} f(x)(e_k) \|^2 \right)^{p/2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \| D_{e_k} E^{V_n} f(x) \|^2 \right)^{p/2} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \| E^{V_n} D_{e_k} f(x) \|^2 \right)^{p/2} \quad \text{d'après le lemme antérieur.}
\end{aligned}
$$

On observe maintenant que $(E^{V_n}\nabla f)(x)(e_k)=E^{V_n}D_{e_k}f(x)$ car, si $\nabla f(x)=\sum_s c_s\mathscr{H}_s(x)$, avec $c_s\in\mathscr{L}(H;G)$, alors $\nabla f(x)(e_k)=D_{e_k}f(x)=\sum_s c_s(e_k)\mathscr{H}_s(x)$. Alors, pour tout x, et pour tout p, on a :

$$\|\nabla E^{V_n}f(x)\|^p\leqslant\|E^{V_n}\nabla f(x)\|^p, \tag{2.1}$$

d'où

$$\|\nabla E^{V_n}f\|_{L^p(\mu)}\leqslant\|E^{V_n}\nabla f\|_{L^p(\mu)}\leqslant\|\nabla f\|_{L^p(\mu)}.$$

On montre de façon analogue que $\|\nabla^r E^{V_n}f\|_{L^p}\leqslant\|\nabla^r f\|_{L^p}$ pour $r>1$; en effet, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}\|\nabla^r E^{V_n}f(x)\|^p&=\left(\sum_{k_1,\dots,k_r=1}^{+\infty}\|\nabla^r E^{V_n}f(x)(e_{k_1},\dots,e_{k_r})\|^2\right)^{p/2}\\&=\left(\sum_{k_1,\dots,k_r=1}^{+\infty}\|D_{e_{k_1}}\cdots D_{e_{k_r}}E^{V_n}f(x)\|^2\right)^{p/2}\end{aligned}$$

Or $D_{e_{k_1}}\cdots D_{e_{k_r}}E^{V_n}f=E^{V_n}D_{e_{k_1}}\cdots D_{e_{k_r}}f$ si $k_1,\dots,k_r\leqslant n$; autrement le premier membre vaut 0. Aussi,

$$E^{V_n}D_{e_{k_1}}\cdots D_{e_{k_r}}f(x)=(E^{V_n}\nabla^r f)(x)(e_{k_1},\dots,e_{k_r}),$$

d'où on peut encore conclure (i) pour tout p et tout r.

En ce qui concerne (ii), $E^{V_n}f\to_n f$ dans $L^p(\mu)$; d'autre part,

$$\begin{aligned}&\int_X\|\nabla E^{V_n}f-\nabla f\|^p(x)\,d\mu(x)\\&=\int_X\left(\sum_i\|D_{e_i}(E^{V_n}f-f)\|^2(x)\right)^{p/2}d\mu(x)\\&=\int_X\left(\sum_{i=1}^n\|E^{V_n}D_{e_i}f(x)-D_{e_i}f(x)\|^2\right)^{p/2}d\mu(x)\\&\quad+\int_X\left(\sum_{i>n}\|D_{e_i}f(x)\|^2\right)^{p/2}d\mu(x)\\&\leqslant\int_X\left(\sum_{i=1}^{+\infty}\|E^{V_n}\nabla f(x)(e_i)-\nabla f(x)(e_i)\|^2\right)^{p/2}d\mu(x)\\&\quad+\int_X\left(\sum_{i>n}\|D_{e_i}f(x)\|^2\right)^{p/2}d\mu(x)\\&=\|E^{V_n}\nabla f-\nabla f\|_{L^p(\mu)}+\int_X\left(\sum_{i>n}\|D_{e_i}f(x)\|^2\right)^{p/2}d\mu(x)\end{aligned}$$

et cette quantité tends vers 0. Pour $r>1$ le raisonnement est analogue. ∎

2.2. *Approximation d'un champs de vecteurs*

On considère les champs de vecteurs $E^{V_n}A$. Ces champs sont définis sur X mais ne dépendent, en effet, que de n coordonnèes; on peut donc les considérer comme définis sur $\mathbb{R}^n$ (et à valeurs dans H). D'après les hypothèses (i) de 1.4.1 et les lemmes antérieurs, ils appartiennent à l'espace $W^2_\infty(\mathbb{R}^n, H)$. De plus, on projette $E^{V_n}A$ sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, P_{V_n} notant la projection orthogonale de H sur V_n, on pose

$$A_n(x) = P_{V_n}[E^{V_n}A(x)].$$

On a $\|A_n(x)\| \leqslant \|E^{V_n}A(x)\|$ et, comme $D_h A_n(x) = P_{V_n}[D_h E^{V_n}A(x)]$ pour tout $h \in H$, on voit que $\|A_n\|_{r,p} \leqslant \|E^{V_n}A\|_{r,p}$. Par conséquent les A_n sont dans l'espace $W^2_\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. D'après le théorème d'immersion de Sobolev, ce sont des fonctions C^∞.

2.2.1. Lemme. $\forall \lambda > 0$ $\forall n$ *on a*

$$\int_X \exp(\lambda \|A_n(x)\|)\, d\mu(x) \leqslant \int_X \exp(\lambda \|A(x)\|)\, d\mu(x)$$

et

$$\int_X \exp(\lambda \|\nabla A_n(x)\|)\, d\mu(x) \leqslant \int_X \exp(\lambda \|\nabla A(x)\|)\, d\mu(x).$$

Démonstration. On a:

$$\int_X \exp(\lambda \|A_n(x)\|)\, d\mu(x)$$

$$= \sum_j \frac{\lambda^j}{j!} \|A_n\|_{L^j} \leqslant \int_X \exp(\lambda \|A(x)\|)\, d\mu(x).$$

D'autre part, on a déjà montré (2.1) que, pour tout x,

$$\|\nabla E^{V_n}A(x)\| \leqslant \|E^{V_n}\nabla A(x)\| \text{ et, à fortiori, } \|\nabla A_n(x)\| \leqslant \|E^{V_n}\nabla A(x)\|.$$

D'où on a:

$$\int_X \exp(\lambda \|\nabla A_n(x)\|)\, d\mu(x)$$

$$= \sum_j \frac{\lambda^j}{j!} \|\nabla A_n\|^j_{L^j}$$

$$\leqslant \sum_j \frac{\lambda^j}{j!} \|\nabla A\|^j_{L^j} = \int_X \exp(\lambda \|\nabla A(x)\|)\, d\mu(x). \qquad \blacksquare$$

En ce qui concerne les divergence des A_n, on a la propriété suivante:

2.2.2. LEMME. *$\delta A_n = E^{V_n}\delta A$ (δA_n est prise au sens de $\mathbb{R}^n$ et par rapport à la mesure Gaussienne standard, qu'on note aussi par μ).*

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\nabla\varphi \in L^2$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_n} E^{V_n}(\delta A)\,\varphi(x_1,\dots,x_n)\,d\mu &= \int_X \delta A\,\varphi(x_1,\dots,x_n)\,d\mu\\ &= \int_X (A\,|\,\nabla\varphi)\,d\mu = \int_X (P_{V_n}A\,|\,\nabla\varphi)\,d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (E^{V_n}[P_{V_n}A]\,|\,\nabla\varphi)\,d\mu.\end{aligned}$$

Comme $E^{V_n}[P_{V_n}A] = P_{V_n}[E^{V_n}A]$, on a démontré l'égalité. ∎

D'après les résultats antérieurs, on voit que les champs A_n vérifient les hypothèses du théorème 1.6.1, avec de plus

$$\int_X \exp(\lambda\,|\delta A_n(x)|)\,d\mu(x) \leqslant \int_X \exp(\lambda\,|\delta A(x)|)\,d\mu(x).$$

3. UNE FORMULE DE PERTURBATION DES FLOTS ET CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS

3.1. *Formule de perturbation des flots*

3.1.1. LEMME. *Soient B et B_0 deux champs de vecteurs C^3 sur $\mathbb{R}^n$ définissant des flots globaux U_t^B et $U_t^{B_0}$. Soit $h = B - B_0$. Alors on a*

(i) $U_t^B = U_t^{B_0} \circ U_0^{t,Z}$,

où $U_{t_1}^{t_2,Z}$ est défini par

(ii) $(\partial U_{t_1}^{t_2,Z}/\partial t_2)(x) = Z^{t_2}(U_{t_1}^{t_2,Z}(x))$, $U_{t_1}^{t_1}(x) = x$,

et Z est donné par

(iii) $Z^t(y) = (U_{-t}^{B_0})'\,(y)\,h(U_t^{B_0}(y))$.

Démonstration. Soit $\varphi(t) = U_t^{B_0} \circ U_0^{t,Z}(x)$. Si on dérive cette expression en t, on obtient :

$$\frac{d\varphi}{dt} = B_0(\varphi(t)) + (U_t^{B_0})'\,(y)\,Z^t(y) \qquad \text{où} \quad y = U_0^{t,Z}(x).$$

D'autre part, $(U_t^{B_0})'(y)\,Z^t(y) = h(U_t^{B_0}(y))$ et, par conséquent,

$$\frac{d\varphi}{dt} = B_0(\varphi(t)) + h(\varphi(t)) = B(\varphi(t)). \quad \blacksquare$$

3.1.2. Corollaire. *Avec les notations du lemme antérieur, on a*

$$U_t^B = (U_{-t}^{0,Z}) \circ U_t^{B_0}. \tag{3.1}$$

Démonstration. D'après le lemme, $U_{-t}^B = U_{-t}^{B_0} \circ U_0^{-t,Z}$, c'est-à-dire, $(U_t^B)^{-1} = (U_t^{B_0})^{-1} \circ (U_0^{-t,Z})$, d'où $U_t^B = (U_0^{-t,Z})^{-1} \circ U_t^{B_0}$, et on déduit le résultat d'après la propriété $U_{t_2}^{t_3,Z} \circ U_{t_1}^{t_2,Z} = U_{t_1}^{t_3,Z}$, qui entraîne $(U_0^{t,Z})^{-1} = U_t^{0,Z}$. $\blacksquare$

3.1.3. Corollaire. *Avec les notations du lemme* 3.1.1., *on a*

$$U_t^B(x) - U_t^{B_0}(x) = -\int_0^{-t} (U_{t+\xi}^{B_0})'\,(U_\xi^{0,Z}(y)) \cdot h(U_{-t-\xi}^{B_0})(U_\xi^{0,Z}(y))\,d\xi, \tag{3.2}$$

où

$$y = U_t^{B_0}(x).$$

Démonstration. Posons $\lambda = t_1 - t_2$ et $\psi(\lambda, t_1, x) = U_{t_1}^{t_2,Z}(x) = U_{t_1}^{t_1-\lambda,Z}(x)$. On a $(\partial\psi/\partial\lambda) = -Z^{t_1-\lambda}(\psi)$, d'où : $\psi(\lambda, t_1, x) = x - \int_0^\lambda Z^{t_1-\xi}(U_{\xi+t_2}^{t_2,Z}(x))\,d\xi$. En particulier, pour $t_2 = 0$ et $t_1 = -t$, $U_{-t}^{0,Z}(x) = x - \int_0^{-t} Z^{-t-\xi}(U_\xi^{0,Z}(x))\,d\xi$. Par conséquent, $U_t^B(x) - U_t^{B_0}(x) = U_{-t}^{0,Z}(y) - y = -\int_0^{-t} Z^{-t-\xi}(U_\xi^{0,Z}(y))\,d\xi$, où $y = U_t^{B_0}(x)$ et on a (3.2). $\blacksquare$

3.2. *Convergence des approximations*

D'après le théorème 1.6.1, les champs A_n définis au paragraphe 2 possèdent des flots définis pour tout t, μ-p.p. en x. En plus, on a la formule de changement de variable suivante:

$$\frac{d(U_t^{A_n})_* \mu}{d\mu}(x) = \exp\left(\int_0^t \delta A_n\,(U_{-\xi}^{A_n}(x))\,d\xi\right) = k_t^n(x). \tag{3.3}$$

Ces flots sont des transformations de $\mathbb{R}^n$. On va pourtant les modifier de façon qu'ils soient des transformations sur X et, en même temps, ne pas changer la formule ci-dessus. En fait, on peut écrire, pour $x \in X$,

$$x = y + z \qquad \text{où} \quad z \in V_n.$$

Si $U_t^{A_n}$ est le flot défini sur $\mathbb{R}^n$ pour A_n, on pose $\tilde{U}_t^{A_n}(x) = U_t^{A_n}(z) + y$. $\tilde{U}_t^{A_n}$ vérifie encore l'équation différentielle $d\tilde{U}_t^{A_n}/dt = A_n(\tilde{U}_t^{A_n})$ et on a $\tilde{U}_0^{A_n}(x) = x$.

Si φ est une fonction définie sur V_n, alors on a $\varphi(\tilde{U}_t^{A_n}(x)) = \varphi(U_t^{A_n}(x))$.

D'autre part, la mesure μ se décompose:

$$\mu = \mu_n \otimes v_n,$$

avec v_n portée par $V_n^\perp$ et, ceci étant,

$$\begin{aligned}\int_X \psi d(\tilde{U}_t^{A_n})_* \mu &= \int_{V_n^\perp} \left(\int_{V_n} \psi(\tilde{U}_t^{A_n}(x))\, d\mu_n(\dot{x}) \right) dv_n(x) \\ &= \int_X \psi(x) \exp\left(\int_0^t \delta A_n(U_{-\xi}^{A_n}(x))\, d\xi \right) d\mu(x)\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on a pour ces flots "modifiés" la formule suivante:

$$\frac{d(\tilde{U}_t^{A_n})_* \mu}{d\mu}(x) = \exp\left(\int_0^t \delta A_n(\tilde{U}_{-\xi}^{A_n}(x))\, d\xi \right) = k_t^n(x). \tag{3.4}$$

On considère alors $\tilde{U}_t^{A_n}$ et on veut montrer la convergence de ces fonctionelles. On aura besoin dans la démonstration d'une estimation de la norme de la matrice $(U_t^{A_n})'(x)$.

3.2.1. LEMME. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$ la matrice $(U_t^{A_n})'(x)$ est dans l'espace $L^q(X; \operatorname{End} H)$ pour tout $1 \leqslant q < +\infty$, et si $|t| < M$, on a*

$$\int_X \|(U_t^{A_n})'(x)\|^q\, d\mu(x) \leqslant C_1(M),$$

où $C_1(M)$ est indépendante de n.

Démonstration. Soit Y_n la matrice $(\partial_k A_n^j)$, où k est l'indice des colonnes et j l'indice des lignes. La matrice $X_n^t(x) = (U_t^{A_n})'(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dX_n^t(x)}{dt} = Y_n(U_t^{A_n}(x)) \cdot X_n^t(x),$$

d'où

$$\|X_n^t(x)\|_{\operatorname{End} H} \leqslant \exp\left(\int_0^t \|Y_n(U_\xi^{A_n}(x))\|_{\operatorname{End} H}\, d\xi \right)$$

et

$$\int_X \|X_n^t(X)\|^q_{\mathrm{End}\,H}\, d\mu(x) \leqslant \int_X \exp\left(|t|\, q \int_0^t \|Y_n(U_\xi^{A_n}(x))\| \frac{d\xi}{|t|}\right) d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_0^t \left(\int_X \exp\left(|t| q \|Y_n(U_\xi^{A_n}(x))\|\right) d\mu(x)\right) \frac{d\xi}{|t|}.$$

D'après la formule de changement de variable,

$$\int_X \|X_n^t(x)\|^q_{\mathrm{End}\,H}\, d\mu(x) \leqslant \int_0^t \frac{d\xi}{|t|} \int_X \left[\exp(|t|\, q\, \|Y_n(x)\|)\right.$$

$$\left. \times \exp\left(\int_0^\xi \delta A_n(U_{-\lambda}^{A_n}(x))\, d\lambda\right)\right] d\mu(x).$$

On a $\|Y_n(x)\|_{\mathrm{End}\,H} \leqslant \|\nabla A_n(x)\|$, d'après la définition de la matrice Y_n. D'autre part, on peut appliquer Hölder et obtenir :

$$\int_X \|X_n^t(x)\|^q\, d\mu(x) \leqslant \int_0^t \left[\int_X \exp(|t|\, qp'\, \|\nabla A_n(x)\|)\, d\mu(x)\right]^{1/p'} \|k_\xi^n\|_{L^{q'}} \frac{d\xi}{|t|}$$

D'après le lemme 2.2.1, l'hypothèse de 1.4.1 et le théorème 1.6.1, on a la majoration désirée. ∎

3.2.2. Lemme. *Pour tout t fixé les $(\tilde{U}_t^{A_n})(x)$ forment une suite de Cauchy dans l'espace $L^q(X;X)$,* où X est muni de la norme uniforme, *pour tout $1 \leqslant q < +\infty$, et uniformément en $t \in [-M, M]$. On note par $U_t^A(x)$ la limite de cette suite.*

Démonstration. D'après la formule (3.2), et si $x = y + z$, $z \in V_n$, on a

$$\tilde{U}_t^{A_{n+p}}(x) - \tilde{U}_t^{A_n}(x) = U_t^{A_{n+p}}(z) - U_t^{A_n}(z)$$

$$= -\int_0^{-t} (U_{t+\xi}^{A_n})'\, (U_\xi^{0,Z}(U_t^{A_n}(z)))$$

$$\cdot (A_{n+p} - A_n)(U_{-t-\xi}^{A_n})(U_\xi^{0,Z}(U_t^{A_n}(z)))\, d\xi.$$

On remarque que $U_\xi^{0,Z} = (U_0^{\xi,Z})^{-1} = U_{-\xi}^{A_{n+p}} \circ U_\xi^{A_n}$, d'où

$$\tilde{U}_t^{A_{n+p}}(x) - \tilde{U}_t^{A_n}(x)$$

$$= -\int_0^{-t} (U_{t+\xi}^{A_n})' \, (\tilde{U}_{-\xi}^{A_{n+p}} \circ \tilde{U}_\xi^{A_n}(\tilde{U}_t^{A_n}(x)))(A_{n+p} - A_n)$$

$$(\tilde{U}_{-t-\xi}^{A_n})(\tilde{U}_{-\xi}^{A_{n+p}} \circ \tilde{U}_\xi^{A_n}(\tilde{U}_t^{A_n}(x))) \, d\xi.$$

D'après la formule (3.4) de 3.2 et avec l'inégalité d'Hölder, on a

$$\int_X \| \tilde{U}_t^{A_{n+p}}(x) - \tilde{U}_t^{A_n}(x)\|_H^q \, d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_0^{-t} d\xi \left(\int_X \|(U_{-t-\xi}^{A_n})'\|^{2q} (\tilde{U}_{-\xi}^{A_{n+p}} \circ \tilde{U}_\xi^{A_n}(x)) \, k_t^n(x) \, d\xi(x) \right)^{1/2}$$

$$\times \left(\int_X \|A_{n+p} - A_n\|^{2q} \, (\tilde{U}_{-t-\xi}^{A_n}(\tilde{U}_{-\xi}^{A_{n+p}} \circ \tilde{U}_\xi^{A_n}(x))) \cdot k_t^n(x) \, d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

En appliquant successivement la formule de changement de variable et Hölder, on a l'estimation suivante:

$$\int_X \|(U_{t+\xi}^{A_n})'\|^{2q} \, (\tilde{U}_{-\xi}^{A_{n+p}} \circ \tilde{U}_\xi^{A_n}(x)) \, k_t^n(x) \, d\mu(x)$$

$$\leqslant \|k_t^n\|_{L^2} \cdot \left(\int_X \|(U_{t+\xi}^{A_n})'\|^{4q} (\tilde{U}_{-\xi}^{A_{n+p}}(x)) \, k_\xi^n(x) \, d\mu(x) \right)^{1/2}$$

$$\leqslant \|k_t^n\|_{L^2} \|k_\xi^n\|_{L^2}^{1/2} \left(\int_X \|(U_{t+\xi}^{A_n})'\|^{8q} \, (x) \, k_{-\xi}^{n+p}(x) \, d\mu(x) \right)^{1/4}$$

$$\leqslant \|k_t^n\|_{L^2} \|k_\xi^n\|_{L^2}^{1/2} \, \|k_{-\xi}^{n+p}\|_{L^2}^{1/4} \left(\int_X \|(U_{t+\xi}^{A_n})'\|^{16q} \, d\mu(x) \right)^{1/8}.$$

D'après le lemme 3.2.1 $\|(U_{t+\xi}^{A_n})'\|_{L^{16q}(X;\mathrm{End}\,H)} \leqslant C_1(t+\xi)$ et, d'après le théorème 1.6.1. pour tout q $\|k_t^n\|_{L^q} \leqslant C(M)$, si $|t| < M$.

On peut faire le même type d'estimation pour l'intégrale $\int_X \|A_{n+p} - A_n\|^{2q} \, (\tilde{U}_{-t-\xi}^{A_n}(\tilde{U}_{-\xi}^{A_{n+p}} \circ \tilde{U}_\xi^{A_n}(x))) \cdot k_t^n(x) \, d\mu(x)$ et, comme $\|A_{n+p} - A_n\|_{L^q} \to 0$ pour tout q, on voit que cette intégrale tends vers 0.

Alors, pour tout t fixé, ($|t| < M$), on a:

$$\int_X \| \tilde{U}_t^{A_{n+p}}(x) - \tilde{U}_t^{A_n}(x)\|_H^q \, d\mu(x) \leqslant \eta(M) \cdot \|A_{n+p} - A_n\|_{L^{q'}} \quad \blacksquare \qquad (3.5)$$

3.2.3. COROLLAIRE. *Les* $(\tilde{U}_t^{A_n})(x)$ *forment une suite de Cauchy dans* $L^q([-M, M] \times X; X)$ pour la norme de H (*et, en particulier, pour la norme uniforme de* X).

Démonstration. De l'estimation (3.5) du lemme antérieur on déduit que

$$\int_{-M}^{M} \int_X \| \tilde{U}_t^{A_{n+p}}(x) - \tilde{U}_t^{A_n}(x)\|_H^q \, d\mu(x)\, dt \to 0. \quad \blacksquare$$

3.2.4. COROLLAIRE. $U_t^A\,(x) - x \in H$.

Démonstration. C'est une conséquence de 3.2.3 et du fait que

$$(\tilde{U}_t^{A_n})(x) - x = \int_0^t A_n\,(U_\xi^{A_n}(x))\, d\xi \in H, \qquad \forall n. \quad \blacksquare$$

3.2.5. COROLLAIRE. *L'application* $t \to U_t^A(\cdot)$ *est une application continue de* $\mathbb{R}$ *a valeurs dans* $L^q(X; X)$.

Démonstration. Ceci resulte du fait que $\forall n$, $t \to \tilde{U}_t^{A_n}(x)$ est une application continue à valeurs dans $L^q(X; X)$ et du fait que la suite $\tilde{U}_t^{A_n}(x)$ satisfait uniformément le critère de Cauchy. $\blacksquare$

3.2.6. *Remarque.* Pour tout t fixé on peut extraire une sous-suite de $(\tilde{U}_t^{A_n})(x)$ qui converge μ-presque partout en x vers $U_t^A(x)$. (En effet, et d'après l'uniformité en t du critère de Cauchy pour la suite $\tilde{U}_t^{A_n}(x)$, on peut choisir une sous-suite qui ne dépend pas de t).

4. FORMULE DE CHANGEMENT DE VARIABLE SUR X ET ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

4.1. *Absolue continuité des mesures*

4.1.1. LEMME. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *la mesure* $(U_t^A)_* \mu$ *est absolument continue par rapport à* μ. *Si on écrit*

(i) $(d(U_t^A)_* \mu / d\mu)(x) = k_t(x)$

la fonction $k_t(x)$ *est dans tous les espaces* $L^p(X)$, $1 \leqslant p < +\infty$ *et, si* $|t| < M$, $\|k_t\|_{L^p} \leqslant C(M)$.

Démonstration. Soit F une fonction bornée continue sur X. D'après la remarque 3.2.6., il existe, pour tout t, un sous-suite A_{n_j} de telle sorte que

$\tilde{U}_t^{A_{n_j}}(x) \to U_t^A(x)$ $d\mu$-p.p. en x. Par conséquent, et d'après le théorème de Lebesgue,

$$\int F(\tilde{U}_t^{A_{n_j}}(x))\, d\mu(x) \to \int F(U_t^A(x))\, d\mu(x).$$

D'autre part, d'après (3.4),

$$\int F(\tilde{U}_t^{A_{n_j}}(x))\, d\mu(x) = \int F(x)\, k_j^{n_j}(x)\, d\mu(x)$$

et d'après le théorème 1.6.1., les normes L^p des fonctions $k_t^{n_j}(x)$ sont bornées uniformément en n_j (par $C(M)$, si $|t| < M$). On peut donc extraire une sous-suite $k_t^{n_{j_l}}$ de telle sorte que $k_t^{n_{j_l}}(x)$ converge faiblement dans L^p vers une fonction $k_t(x)$. On a $\|k_t\|_{L^p} \leqslant \lim \|k_t^{n_{j_l}}\|_{L^p}$, d'où $k_t \in L^p$ et

$$\int F(U_t^A(x))\, d\mu(x) = \int F(x)\, k_t(x)\, d\mu(x),$$

c'est-à-dire, on a (i). ∎

4.2. *Equation différentielle*

4.2.1. On montre dans ce paragraphe que $U_t^A(x)$ vérifie l'équation différentielle (iv) du théorème 1.4.1, dans le sens où l'on a l'équation intégrale

$$U_t^A(x) = x + \int_0^t A(U_\xi^A(x))\, d\xi \qquad \forall t,\ d\mu\text{-p.p. en } x. \tag{4.1}$$

D'après la construction des $\tilde{U}_t^{A_n}(x)$, on a :

$$\tilde{U}_t^{A_n}(x) = x + \int_0^t A_n(\tilde{U}_\xi^{A_n}(x))\, d\xi. \tag{4.2}$$

On a montré (lemme 3.2.2) que $\tilde{U}_t^{A_n}(x) - x$ converge vers $U_t^A(x) - x$ dans les espaces $L^q(X; H)$ uniformément en $t \in [-M, M]$. Donc, ce qu'il nous faut, c'est montrer que la limite de $\tilde{U}_t^{A_n}(x) - x$, c'est-à-dire, de $\int_0^t A_n(\tilde{U}_\xi^{A_n}(x))\, d\xi$ est égale à l'expression $\int_0^t A(U_\xi^A(x))\, d\xi$. La difficulté à surmonter est que le champ de vecteurs A n'est pas continue.

On montre d'abord un lemme "technique" pour les flots en dimension finie.

4.2.2. LEMME. *Soient B et B_0 deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ dans les* *conditions du lemme* 3.1.1. *Soit aussi* Z^t *le champ défini dans l'énoncé de lemme. Alors on a*:

$$\frac{d}{d\lambda} U_\lambda^{0,Z}(x) = -(U_0^{B_0})'(U_\lambda^{0,Z}(x)) \cdot (B - B_0)(U_\lambda^{0,Z}(x))$$

$$- \int_0^\lambda \left[\frac{d}{d\lambda} (U_{-\lambda+\xi}^{B_0})'(y) \cdot (B - B_0)(U_{\lambda-\xi}^{B_0})(y) \right.$$

$$\left. + (U_{-\lambda+\xi}^{B_0})'(y) \frac{d}{d\lambda} ((B - B_0)(U_{\lambda-\xi}^{B_0}(y))) \right] d\xi,$$

où

$$y = U_\xi^{0,z}(x).$$

Démonstration. On a montré au corollaire 3.1.3 que $U_\lambda^{0,Z}(x) = x - \int_0^\lambda Z^{\lambda-\xi}(U_\xi^{0,Z}(x))\, d\xi$. Par conséquent,

$$\frac{d}{d\lambda} U_\lambda^{0,Z}(x) = -Z^0(U_\lambda^{0,Z}(x)) - \int_0^\lambda \frac{d}{d\lambda} Z^{\lambda-\xi}(U_\xi^{0,Z}(x))\, d\xi.$$

Et, d'après la définition de Z^t, on a:

$$\frac{d}{dt} Z^t(y) = \frac{d}{dt} (U_{-t}^{B_0})'(y) \cdot (B - B_0)(U_t^{B_0}(y))$$

$$+ (U_{-t}^{B_0})'(y) \frac{d}{dt} ((B - B_0)(U_t^{B_0}(y))). \quad \blacksquare$$

4.2.3. LEMME. *Pour tout* $M > 0$, *on a*:

$$\lim_{n,l\to\infty} \left[\sup_{|t|<M} \int_X \|A_n(\tilde{U}_t^{A_n}(x)) - A_n(\tilde{U}_t^{A_l}(x))\|\, d\mu(x) \right] = 0.$$

Démonstration. D'après le lemme 3.1.1 $U_t^{A_n} = U_{-t}^{0,Z} \circ U_t^{A_l}$ où $Z^t(y) = (U_{-t}^{A_l})'(y) \cdot (A_n - A_l)(U_t^{A_l}(y))$. Alors, si $x = y + z$, $z \in V_n$,

$$\|A_n(\tilde{U}_t^{A_n}(x)) - A_n(\tilde{U}_t^{A_l}(x))\| = \|A_n(U_t^{A_n}(z)) - A_n(U_t^{A_l}(z))\|$$

$$= \|A_n(U_{-t}^{0,Z}(U_t^{A_l}(z))) - A_n(U_t^{A_l}(z))\|$$

$$= \|A_n(U_{-t}^{0,Z}(\tilde{U}_t^{A_l}(x))) - A_n(\tilde{U}_t^{A_l}(x))\|.$$

D'après la formule (3.4), on a, si $\tilde{U}_t^{0,Z} = \tilde{U}_{-t}^{A_n} \circ \tilde{U}_\lambda^{A_l}$,

$$\int_X \|A_n(\tilde{U}_t^{A_n}(x)) - A_n(\tilde{U}_t^{A_l}(x))\| \, d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_X k_t^l(x) \, \|A_n(\tilde{U}_{-t}^{0,Z}(x)) - A_n(x)\| \, d\mu(x)$$

$$\leqslant \|k_t^l\|_{L^2} \left(\int_X \|A_n(\tilde{U}_{-t}^{0,Z}(x)) - A_n(x)\|^2 \, d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

On estime cette dernière intégrale:

$$\int_X \|A_n(\tilde{U}_{-t}^{0,Z}(x)) - A_n(x)\|^2 \, d\mu(x)$$

$$\leqslant \int_X \int_0^{-t} \|\nabla A_n(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x))\|^2 \left\| \frac{d}{d\lambda} \tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x) \right\|^2 d\lambda \, d\mu(x)$$

$$\leqslant 2(\mathrm{I}(t) + \mathrm{II}(t) + \mathrm{III}(t)),$$

d'après le lemme 4.2.2, où

$$\mathrm{I}(t) = \int_0^{-t} \int_X \|\nabla A_n(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x))\|^2$$

$$\times \|(U_0^{A_l})'(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x))\|^2 \, \|(A_n - A_l)(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x))\|^2 \, d\mu(x) \, d\lambda,$$

$$\mathrm{II}(t) = 2 \int_0^{-t} \lambda \int_X \|\nabla A_n(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x))\|^2$$

$$\times \left[\int_0^\lambda \left\| \frac{d}{d\lambda} (U_{-\lambda+\xi}^{A_l})'(y)(A_n - A_l)(\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y)) \right\|^2 d\xi \right] d\mu(x) \, d\lambda,$$

$$\mathrm{III}(t) = 2 \int_0^{-t} \lambda \int_X \|\nabla A_n(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x))\|^2$$

$$\times \left[\int_0^\lambda \|(U_{-\lambda+\xi}^{A_l})'(y) \frac{d}{d\lambda} ((A_n - A_l)(\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y))) \, d\xi\|^2 \right] d\mu(x) \, d\lambda,$$

où $y = \tilde{U}_\xi^{0,Z}(x)$.

En ce qui concerne I, on applique successivement la formule de changement de variable (3.4) et l'inégalité d'Hölder. D'après le lemme 3.2.1, le fait que pour tout p $\|\nabla A_n\|_{L^p} \leqslant \|\nabla A\|_{L^p}$ et que, pour tout p, $\|A_n - A_l\|_{L^p} \to_{n,l} 0$, on conclue que cette intégrale tends vers zéro. De plus, la convergence est uniforme en $t \in [-M, M]$.

Étudions II : d'abord, la matrice $(U_t^{A_l})'(x)$ vérifie, comme on a vu dans la démonstration du lemme 3.2.1, l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}(U_t^{A_l})'(x) = Y_l(U_t^{A_l}(x)) \cdot (U_t^{A_l})'(x)$$

où Y_l est la matrice $(\partial_i A_l^j)$. Alors on a, si $x = y + z$, $z \in V_n$,

$$\left\| \frac{d}{dt}(U_t^{A_l})'(z) \right\|_{\mathrm{End}\,H} \leqslant \| Y_l(U_t^{A_l}(z)) \|_{\mathrm{End}\,H} \cdot \|(U_t^{A_l})'(z)\|_{\mathrm{End}\,H}$$

d'où on déduit, d'après 3.2.1, et avec la formule de changement de variable, que la matrice $(d/dt)(U_t^{A_l})'(z)$ appartient à tous les L^p, avec une estimation des normes uniforme en l. Alors, et comme $\|A_n - A_l\|_{L^p} \to_{n,l} 0$ pour tout p, on peut encore appliquer la formule de changement de variable et Hölder pour montrer que $\mathrm{II}(t) \to 0$ uniformément en $t \in [-M, M]$.

Finalement, dans l'intégrale III, on a l'expression :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\lambda}((A_n - A_l)(\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y))) \\ &\qquad = \sum_i D_{e_i}(A_n - A_l)(\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y)) \cdot (A_l(\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y)) | e_i), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &\int_X \left\| \frac{d}{d\lambda}((A_n - A_l)(\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y))) \right\|^q d\mu(x) \\ &\qquad \leqslant \left(\int_X \|\nabla(A_n - A_l)\|^{2q} (\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y))\, d\mu(x) \right)^{1/2} \\ &\qquad \times \left(\int_X \|A_l(\tilde{U}_{\lambda-\xi}^{A_l}(y))\|^{2q}\, d\mu(x) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

pour tout q; en utilisant la formule de changement de variable, les estimations uniformes des normes L^p de la matrice Jacobienne des flots, des champs et de ses gradients, et le fait que $\|\nabla(A_n - A_l)\|_{L^p} \to 0$, on obtient la convergence de III vers zéro uniforme en $t \in [-M, M]$, ce qui établit le lemme 4.2.3. ∎

4.2.4. Lemme. *Pour tout $M > 0$ on a*

$$\lim_n \int_{-M}^{M} \int_X \|A_n(\tilde{U}_t^{A_n}(x)) - A_n(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt = 0.$$

Démonstration. Fixons n. D'après le lemme 3.2.3, $\tilde{U}_t^{A_n}(x) \to U_t^A(x)$ dans l'espace $L^1([-M, M] \times X; X)$. Alors, il existe une sous-suite, qu'on note par A_{l_j}, de telle sorte que $\tilde{U}_t^{A_{l_j}}(x) \to U_t^A(x)$ $dt \otimes d\mu$-p.p. en (t, x). A_n étant continue, on a aussi $A_n(\tilde{U}_t^{A_{l_j}}(x)) \to A_n(U_t^A(x))$. D'après le théorème d'Egoroff, $\forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon$ tel que $\mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon$ et tel que la convergence est uniforme sur K_ε.

Soit $\varphi_{l_j}(t, x) = A_n(\tilde{U}_t^{A_{l_j}}(x)) - A_n(U_t^A(x))$. On a

$$\int_{-M}^{M} \int_X \|\varphi_{l_j}(t, x)\|\, d\mu(x)\, dt = \int_{K_\varepsilon} \|\varphi_{l_j}(t, x)\|\, d\mu(x)\, dt$$

$$+ \int_{K_\varepsilon^c} \|\varphi_{l_j}(t, x)\|\, d\mu(x)\, dt.$$

Comme $\varphi_{l_j}(t, x) \to_{l_j} 0$ uniformément sur K_ε, $\lim_{l_j} \int_{K_\varepsilon} \|\varphi_{l_j}(t, x)\|\, d\mu(x)\, dt = 0$.

$$\int_{K_\varepsilon^c} \|\varphi_{l_j}(t, x)\|\, d\mu(x)\, dt$$

$$\leqslant \sqrt{2} \left[\int_{-M}^{M} \int_X \|A_n(\tilde{U}_t^{A_{l_j}}(x))\|^2 \right.$$

$$\left. + \int_{-M}^{M} \int_X \|A_n(U_t^A(x))\|^2\, d\mu(x)\, dt \right]^{1/2} \cdot (\mu(K_\varepsilon^c))^{1/2}$$

et d'après le théorème 1.6.1 et le lemme 4.1.1,

$$\int_{K_\varepsilon^c} \|\varphi_{l_j}(t, x)\|\, d\mu(x)\, dt \leqslant 2 \left[\int_{-M}^{M} \int_X \|A_n(x)\|^2\, k_t^{l_j}(x)\, d\mu(x)\, dt \right.$$

$$\left. + \int_{-M}^{M} \int_X \|A_n(x)\|^2\, k_t(x)\, d\mu(x)\, dt \right] \cdot \varepsilon^{1/2}$$

$$\leqslant 2C(M) \|A\|_{L^4}^{1/2} \cdot \varepsilon^{1/2}.$$

On peut donc conclure, pour tout n fixé,

$$\lim_{l_j} \int_{-M}^{M} \int_X \|A_n(\tilde{U}_t^{A_{l_j}}(x)) - A_n(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt = 0.$$

Par conséquent

$$\left|\int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(\tilde U_t^{A_n}(x)) - A_n(\tilde U_t^{A_{l_j}}(x))\|\, d\mu(x)\, dt - \int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(\tilde U_t^{A_n}(x)) - A_n(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt\right|$$
$$\leqslant \int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(\tilde U_t^{A_{l_j}}(x)) - A_n(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt$$

tends aussi vers zéro quand $l_j \to \infty$. Finalement, et d'après le lemme antérieur,

$$\lim_n \int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(\tilde U_t^{A_n}x) - A_n(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt$$
$$= \lim_n \left(\lim_{l_j} \int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(\tilde U_t^{A_n}(x)) - A_n(\tilde U_t^{A_{l_j}}(x))\|\, d\mu(x)\, dt\right) = 0. \quad \blacksquare$$

4.2.5. LEMME. *Pour tout* $M > 0$ $A_n(\tilde U_t^{A_n}(x)) - A(U_t^A(x)) \to 0$ *dans l'espace* $L^1([-M, M] \times X; H)$.

Démonstration. On a :

$$\int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(\tilde U_t^{A_n}(x) - A(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt$$
$$\leqslant \int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(\tilde U_t^{A_n}(x)) - A_n(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt$$
$$+ \int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(U_t^A(x)) - A(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt.$$

Le lemme 4.2.4 nous dit justement que la première intégrale dans la somme tends vers zéro. Quant à la deuxième, et d'après le lemme 4.1.1, on a

$$\int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(U_t^A(x)) - A(U_t^A(x))\|\, d\mu(x)\, dt$$
$$= \int_{-M}^{M}\int_X \|A_n(x) - A(x)\|\, k_t(x)\, d\mu(x)\, dt$$
$$\leqslant \int_{-M}^{M} \|A_n - A\|_{L^2(\mu)} \cdot \|k_t\|_{L^2(\mu)}\, dt \leqslant C(M)\|A_n - A\|_{L^2(\mu)} \underset{n}{\to} 0. \quad \blacksquare$$

4.2.6. Maintenant démontrons (4.1). Du lemme 4.2.5 on déduit que, pour tout t fixé, on a

$$\int_0^t \int_X \| A_n(\tilde{U}_\xi^{A_n}(x)) - A(U_\xi^A(x)) \| \, d\mu(x) \, d\xi \underset{n}{\to} 0.$$

Comme $\tilde{U}_t^{A_n}(x) - x = \int_0^t A_n(\tilde{U}_\xi^{A_n}(x)) \, d\xi$ converge vers $U_t^A(x) - x$ dans les espaces $L^q(X; H)$ uniformément en $t \in [-M, M]$, (voir 4.2.1), on a l'égalité des limites $U_t^A(x) - x$ et $\int_0^t A(U_\xi^A(x)) \, d\xi$, c'est-à-dire, on a l'équation intégrale (4.1).

4.3. *Formule de changement de variable*

4.3.1. *D'après le lemme* 4.1.1; *on a déjà l'absolue continuité de* $(U_t^A)_* \mu$ *par rapport à* μ. *Il nous reste à montrer que, si* $\delta A \in W_1^{16}$, *alors la fonction* $k_t(x) = (d(U_t^A)_* \mu / d\mu)(x)$ *est donnée par* $k_t(x) = \exp(\int_0^t \delta A(U_{-\xi}^A(x)) \, d\xi)$.

Pour les approximations A_n on a la formule (3.4):

$$\frac{d(\tilde{U}_t^{A_n})_* \mu}{d\mu}(x) = \exp\left(\int_0^t \delta A_n(\tilde{U}_{-\xi}^{A_n}(x)) \, d\xi\right) = k_t^n(x),$$

et, d'après le lemme 2.2.2, $\delta A_n = E^{V_n} \delta A$, d'où

$$\forall \lambda > 0 \int_{\mathbb{R}^n} \exp \lambda(|\delta A_n(x)|) \, d\mu(x) \leqslant \int_X \exp \lambda(|\delta A(x)|) \, d\mu(x).$$

4.3.2. Lemme. *Si* $\delta A \in W_1^{16}$, *alors, pour tout* $M > 0$ *on a* $\delta A_n(\tilde{U}_t^{A_n}(x)) - \delta A(U_t^A(x)) \to_n 0$ *dans l'espace* $L^1([-M, M] \times X; \mathbb{R})$.

Démonstration. On répète le raisonnement des lemmes 4.2.3–4.2.5 pour la divergence. Dans les intégrales I, II, III du lemme 4.2.3., on aura besoin de l'hypothèse $\delta A \in W_1^{16}$ pour borner $\int_X \| \nabla \delta A_n(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x)) \|^4 \, d\mu(x)$. En effet, comme $\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x) = \tilde{U}_{-\lambda}^{A_n} \circ \tilde{U}_\lambda^{A_l}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_X \left\| \nabla \delta A_n(\tilde{U}_\lambda^{0,Z}(x)) \right\|^4 d\mu(x) &\leqslant \int_X \| \nabla \delta A_n(\tilde{U}_{-\lambda}^{A_n}(x)) \|^4 \, k_\lambda^l(x) \, d\mu(x) \\
&\leqslant \| k_\lambda^l \|_{L^2} \left(\int_X \| \nabla \delta A_n(x) \|^8 \, k_{-\lambda}^n(x) \, d\mu(x) \right)^{1/2} \\
&\leqslant \| k_\lambda^l \|_{L^2} \| k_{-\lambda}^n \|_{L^2} \left(\int_X \| \nabla E^{V_n} \delta A(x) \|^{16} \right)^{1/2} \\
&\leqslant C^2(M) \| \nabla \delta A \|_{L^{16}}^8. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

4.3.3. Soit F une fonction continue bornée sur X et considérons la formule :

$$\int_X F(\tilde{U}_t^{A_n}(x))\, d\mu(x) = \int_X F(x) \exp\left(\int_0^t \delta A_n(\tilde{U}_{-\xi}^{A_n}(x))\, d\xi\right) d\mu(x). \qquad (4.3)$$

D'après la remarque 3.2.6, il existe, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, une sous-suite de $\tilde{U}_t^{A_n}(x)$ qui converge vers $U_t^A(x)$ μ-p.p. en x. Supposons, pour ne pas trop alourdir l'écriture, que $\tilde{U}_t^{A_n}(x)$ désigne déjà cette sous-suite. D'après le théorème de Lebesgue,

$$\int F(\tilde{U}_t^{A_n}(x))\, d\mu(x) \underset{n}{\rightarrow} \int F(U_t^A(x))\, d\mu(x).$$

D'autre part, le lemme 4.3.2 entraîne que, pour t fixé,

$$\lim_n \int_X \left| \int_0^{-t} \delta A_n(\tilde{U}_\xi^{A_n}(x))\, d\xi - \int_0^{-t} \delta A(U_\xi^A(x))\, d\xi \right| d\mu(x)$$

$$\leqslant \lim_n \int_X \int_0^{-t} |\delta A_n(\tilde{U}_\xi^{A_n}(x)) - \delta A(U_\xi^A(x))|\, d\xi\, d\mu(x) = 0.$$

Par conséquent, il existe une sous-suite A_{n_k} de telle sorte que

$$\int_0^{-t} \delta A_{n_k}(\tilde{U}_\xi^{A_{n_k}}(x))\, d\xi \underset{n_k}{\longrightarrow} \int_0^{-t} \delta A(U_\xi^A(x))\, d\xi \qquad \mu\text{-p.p. en } x.$$

Alors, la fonction $\exp(\int_0^t \delta A_{n_k}(U_{-\xi}^{A_{n_k}}(x))\, d\xi) = \exp(-\int_0^{-t} \delta A_{n_k}(\tilde{U}_\xi^{A_{n_k}}(x))\, d\xi)$ tends vers $\exp(-\int_0^{-t} \delta A(U_\xi^A(x))\, d\xi)$ μ-p.p. en x.

Comme les fonctions $k_t^n(x) = \exp(\int_0^t \delta A_n(\tilde{U}_{-\xi}^{A_n}(x))\, d\xi)$ (et $\exp(\int_0^t \delta A(U_{-\xi}^A(x))\, d\xi)$) sont dans tous les espaces $L^p(\mu)$, ayant des normes bornées uniformément en n, on a la convergence du deuxième membre de l'égalité (4.3), nécessairement vers $\int_X F(x) \exp(\int_0^t \delta A(U_{-\xi}^A(x))\, d\xi)\, d\mu(x)$. D'où

$$\frac{d(U_t^A)_* \mu}{d\mu}(x) = \exp\left(-\int_0^{-t} \delta A(U_\xi^A(x))\, d\xi\right) = \exp\left(\int_0^t \delta A(U_{-\xi}^A(x))\, d\xi\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. R. H. CAMERON AND W. T. MARTIN, Transformation of Wiener integrals under translations, *Ann. of Math.* **45** (1944), 386–396.
2. R. H. CAMERON AND W. T. MARTIN, Expression for the solution of a class of non linear integral equations, *Amer. J. Math.* **66** (1944), 281–298.

3. A. B. CRUZEIRO, Equations différentielles ordinaires: non explosion et mesures quasi-invariantes, *J. Funct. Anal.* **54** (1983), 193–205.
4. B. GAVEAU ET P. TRAUBER, L'intégrale stochastique comme opérateur de divergence dans l'espace fonctionnel, *J. Funct. Anal.* **46** (1982), 230–238.
5. L. GROSS, Integration and nonlinear transformations in Hilbert space, *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** (1960), 404–440.
6. P. KRÉE, Solutions faibles d'équations aux dérivées fonctionnelles II, *in* "Sém. P. Lelong, Analyse, 14e année, 1973–1974," Lecture Notes in Math., (No. 474, pp. 16–47, Springer–Verlag, Berlin/New York.
7. M. KRÉE ET P. KRÉE, Continuité de la divergence dans les espaces de Sobolev relatifs à l'espace de Wiener, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I* (1983)
8. H. H. KUO, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math, No. 463, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1975.
9. P. MALLIAVIN, Implicit functions in finite corank on the Wiener space, *in* "Symposium de Katata, 1982," 1983.
10. P. MALLIAVIN, Analyse différentielle sur l'espace de Wiener, *in* "Proceed. du Congrès Intern. de Varsovie," 1983/1984.
11. I. SHIGEKAWA, Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures, *J. Math. Kyoto Univ.* **20** (2) (1980), 263–283.
12. A. V. SKOROHOD, "Integration in Hilbert space," Ergebnisse der Math., Springer-Verlag, Berlin/New York, 1974.
13. D. STROOK, The Malliavin calculus, a functional analytic approach, *J. Funct. Anal.* **44** (1981), 212–257.
14. N. WIENER, Universal chaos, *Acta Math.* (1923).

Printed in Belgium